

МІНІСТЕРСТВО ОХОРОНИ ЗДОРОВ'Я УКРАЇНИ
Полтавський державний медичний університет

*Навчально-науковий центр
з підготовки іноземних громадян*

Інна КОЛЄЧКІНА

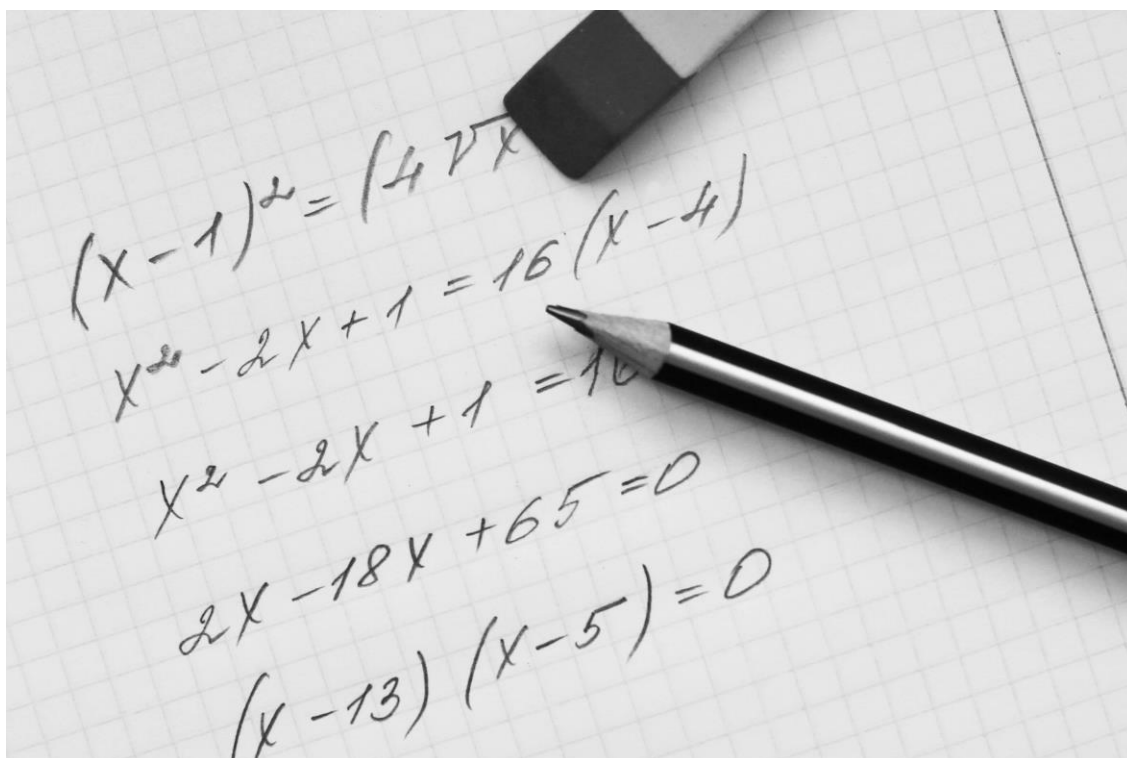
МАТЕМАТИКА

Частина II

Рівняння. Системи рівнянь

Нерівності

Навчальний посібник для іноземних слухачів



Полтава – 2021

УДК 517.9:81.161.2'243(0,75.8)
К 60

Рецензенти:

Кононович Т.О., д.фіз.-мат. наук, доцент кафедри математичного аналізу та інформатики Полтавського національного педагогічного університету імені В.Г. Короленка.

Самойленко С.О., к.фіз.-мат. наук, викладач кафедри медичної інформатики медичної та біологічної фізики Полтавського державного медичного університету.

Рекомендовано до друку Центральною методичною комісією Полтавського державного медичного університету (протокол №1 від 10 червня 2021 р.)

К 60 **Колєчкіна І.В.**
Математика. Частина II. Рівняння. Системи рівнянь. Нерівності / І.В. Колєчкіна. – Полтава: Полтавський державний медичний університет, 2020. – 44 с.

Посібник є частиною комплексу навчальних матеріалів з математики й адресований іноземним громадянам, що проходять доуніверситетську підготовку за медико-біологічним профілем.

Пропонований посібник може бути використаний як для аудиторної роботи у супроводі викладача, так і для самостійної позааудиторної роботи.

УДК 517.9:81.161.2'243(0,75.8)

©Полтавський державний медичний університет, 2020
©Колєчкіна І.В., 2020

Зміст

Заняття № 1.	Рівності. Тотожності. Рівняння.....	4
Заняття №2.	Рівняння, що містять модуль.....	8
Заняття №3.	Системи лінійних рівнянь з двома невідомими та способи їх розв'язання.....	13
Заняття № 4.	Квадратні рівняння. Теорема Вієта. Розкладання квадратного тричлена на множники.....	18
Заняття №5.	Біквадратні рівняння. Ірраціональні рівняння.	24
Заняття №6.	Нерівності. Числові нерівності та їх властивості Лінійні нерівності.....	28
Заняття №7.	Системи лінійних нерівностей з однією змінною.....	33
Заняття №8.	Квадратні нерівності. Дробово-раціональні нерівності. Метод інтервалів.....	35
Заняття №9.	Розв'язування прикладів. Повторення.....	41
Заняття №10.	КОНТРОЛЬНА РОБОТА №3.....	42

Передмова

Навчальний посібник призначений для іноземних слухачів, які готуються до навчання у ЗВО за медико-біологічним профілем.

Даний посібник складений у відповідності до програми з математики для підготовчих факультетів.

Вивчення матеріалу даного посібника сприяє узагальненню та систематизації знань по темах «Рівняння. Системи рівнянь. Нерівності», отриманих студентами на батьківщині.

Кожне заняття містить термінологічний словник, граматичні конструкції, адаптовані навчальні тексти, зразки виконання вправ, завдання різного рівня складності для закріплення та повторення вивченого матеріалу.

Завдання посібника сприяють ефективному засвоєнню математичної термінології, набуттю слухачами необхідних практичних навичок використання та застосування математичного апарата для розв'язування фізичних та хімічних задач.

Заняття № 1. Рівності. Тотожності. Рівняння

Словник уроку:

Українська	Англійська	Французька	Арабська	Фарсі
рівність, -і	equality	egalite	مساواة	برابری
тотожність, -і	identity	identite	مطابقة	همانند
рівняння	equation	equation	معادلة	معادله
містити (що?)	to contain	contenir	يحتوي	متشکل
вірно=справедливо= =правильно	true	juste	صحيح	درست=واقعی=صحیح
допустиме значення	admissible value	valeur admissible	القيمة المسموحة	مجاز
невідома величина	unknown quantity	inconnu	قيمة مجهولة	ارزش نا مفهوم
деякий, -а, -е, -і	some	quelque, certain	بعض	برخی
мати сенс	to have sens	avoir du sens	تمتلك معنى	با معنی
розв'язувати/ розв'язати (що?)	to decide	resourde	حل	حل کردن
розв'язання	decision	decision	قرار	حل
корінь рівняння	root of equation	racine de equation	جذر المعادلة	ریشه معادله
рівносильний (еквівалентний)	equivalent	equivalent	نظير	معادل آن
лінійне рівняння (рівняння першого степеня)	linear equation	lineaire equation	معادلة خطية	معادله خطی
числовий коефіцієнт	coefficient	coefficient	عدد ثابت	ثوابت عددی
вільний член	independent term	terme independant	مصطلح مستقل	جمله آزاد
перетворюватися/ перетворитися (на що?)	to transform	transformer	للتحول	برای تبدیل
розглядати/ розглянути (що?)	to consider	à envisager	لاعتبار	در نظر گرفتن
область допустимих значень	range of valid values	plage de valeurs valides	نطاق القيم الصالحة	دامنه مقادير معتبر

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

1. Для чого(р.в.) потрібно знати що(з.в.).

Для розв'язування рівнянь потрібно знати наступні властивості.

2. Що(н.в.) називається чим(о.в.)

Значення невідомої величини, при якому ліва та права частини рівняння рівні, називається розв'язанням рівняння або коренем рівняння.

3. Що(н.в.) є чим(о.в.)

Корені одного рівняння є коренями другого рівняння.

4. Що(н.в.) перетворюється на що(з.в.)

Рівняння перетворюється на правильну числову рівність.

Завдання №1. Слухайте та читайте текст №1.

Текст №1

В алгебрі розглядають два види буквених рівностей – тотожності та рівняння.

Тотожність – це рівність, яка є вірною за будь-яких допустимих значеннях букв.

Наприклад:

$$\begin{array}{l} 1) b + 3b = 4b; \\ 2) (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2; \\ 3) \frac{1}{x} + \frac{1}{x} = \frac{2}{x}. \end{array} \quad \begin{array}{l} \nearrow \\ \longrightarrow \\ \searrow \end{array} \quad \text{– це тотожності}$$

Допустимі значення букв – це такі значення букв, при яких ліва та права частини рівності мають сенс.

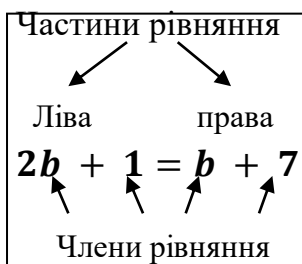
Наприклад, у рівності $b + 3b = 4b$ допустимими значеннями є усі дійсні числа; у рівності $\frac{1}{x} + \frac{1}{x} = \frac{2}{x}$ допустимими значеннями букви x є усі дійсні числа, окрім числа 0.

Рівняння – це рівність, яка є вірною лише при деяких значеннях букв.

Розглянемо рівності:

$$a + 4 = 7 \quad (1)$$

$$2b + 1 = b + 7 \quad (2)$$



У рівності (1) допустимими значеннями букви a є будь-яке число, але ліва частина дорівнює правій лише за умови $a = 3$. При всіх інших значеннях a ліва частина цієї рівності не дорівнює правій.

У рівності (2) ліва частина дорівнює правій лише при $b = 6$.

Рівності (1) та (2) є рівняннями.

Значення невідомої величини, при якому рівняння перетворюється на правильну числову рівність (ліва та права частини рівні), називається **розв'язанням рівняння** або **коренем рівняння**.

У рівнянні (1) число 3 є коренем рівняння.

У рівнянні (2) коренем є число 6.

Розв'язати рівняння – означає знайти всі його корені, або встановити, що їх немає.

Два рівняння називаються **рівносильними (еквівалентними)**, якщо вони мають одні й ті самі корені або не мають коренів. Знак рівносильності $\Leftrightarrow$.

Наприклад:

$$2x + 1 = x + 7 \Leftrightarrow \frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 5 \text{ оскільки вони мають корінь } x = 6.$$

Для розв'язування рівнянь потрібно знати наступні властивості:

1) Якщо якийсь доданок перенести з однієї частини рівняння до іншої з протилежним знаком, то отримаємо рівняння, яке є рівносильним даному.

Наприклад, у рівнянні $2x + 1 = x + 7$ число 1 можна перенести з лівої частини до правої, а x – з правої частини до лівої.

$$\text{Тоді отримаємо } 2x - x = 7 - 1.$$

2) Якщо обидві частини рівняння помножити або поділити на одне й те саме число, яке не дорівнює нулю, то отримаємо рівняння, рівносильне даному.

$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 5 \Leftrightarrow 3x + 2x = 30$. Друге рівняння отримали множенням лівої та правої частини першого рівняння на 6.

Область допустимих значень рівняння (ОДЗ) – це множина значень змінної, при яких вирази в обох частинах рівняння визначені.

Наприклад: ОДЗ рівняння $\frac{x}{x-1} = x$ є множина $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

Лінійні рівняння (Рівняння першого степеня)

Загальний вигляд рівняння першого степеня з однією змінною:

$$ax + b = 0,$$

x – змінна = невідома величина (невідоме);

a – числовий коефіцієнт ($a \neq 0$);

b – вільний член.

Розв'яжемо рівняння $ax + b = 0$

$$ax = -b$$

$$x = -\frac{b}{a}$$

Лінійне рівняння має лише один корінь $-\frac{b}{a}$.

Наприклад: лінійне рівняння $3x - 5 = 10 - 2x$ є рівносильним рівнянню

$$5x = 15$$

$x = 3$ – єдиний корінь.

Можлива ситуація, коли лінійне рівняння не має коренів.

Наприклад: рівняння $2(x - 1) + 1 = 3 - (1 - 2x)$ є рівносильним рівнянню $2x - 2x = 2 + 1$ або $0 \cdot x = 3$. Це рівняння не має коренів, адже ліва частина $0 \cdot x$ дорівнює нулю за будь-якого значення x , отже не дорівнює 3.

Завдання №2. Виконайте вправи.

Вправа №1. Дайте відповіді на запитання.

1. Яка рівність називається тотожністю?
2. Що (яка рівність) називається рівнянням?
3. Які допустимі значення змінної в рівності: $\frac{x-1}{2x} + \frac{x}{3-x} = 6$?
4. Що називається коренем рівняння?
5. Що означає фраза розв'яжіть рівняння?
6. Перевірте, чи буде число 4 коренем рівняння?
а) $\frac{6-2x}{5} = 4 + x$; б) $4x - 6 = 2(x + 1)$.
7. Які рівняння називають рівносильними?
8. Перевірте, чи будуть рівняння рівносильними:

$$5x - 12 = x + 8 \quad \text{та} \quad 5x - 12 + \frac{x+1}{x-5} = x + 8 + \frac{x+1}{x-5} ?$$

Вправа №2. Які рівності є тотожностями, а які – рівняннями?

- | | |
|--------------------|---|
| а) $x + 2x = 3x$; | г) $12y - 5 = 6(2y + 1) - 1$; |
| б) $b + 3b = 4$; | д) $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$; |
| в) $c + 5 = 6c$; | е) $x^2 - 2x + 1 = x(x + 2) - 4x - 1$. |

Вправа №3. Розв'яжіть рівняння:

а) $3(x + 2)^2 - (2x - 1)^2 - 7(x + 3)(x - 3) = 28$

б) $2x + \frac{3x-1}{2} - \frac{5x-2}{3} = 2$;

в) $\frac{6-x}{x-5} = 6 + \frac{1}{x-5}$;

$$г) \frac{x-3}{8} + 3 = \frac{3x+127}{20} - \frac{x+9}{12};$$

$$д) \frac{7}{2} - \left(3x + \frac{2}{5}\right) = x - \frac{37-x}{5};$$

$$е) \frac{5x+9}{x} - \frac{7x-1}{x-1} = -2;$$

$$е) \frac{x-3}{x-2} - \frac{7-3x}{2-x} = -1;$$

$$ж) \frac{14}{3(y-4)} - \frac{2+y}{y-4} = \frac{3}{2(4-y)} - \frac{5}{6};$$

$$з) \frac{9x+7}{2} - x + \frac{x-2}{7} = 36.$$

Заняття №2. Рівняння, що містять модуль

Словник уроку

Українська	Англійська	Французька	Арабська	Фарсі
модуль, -і	modulus	valeur absolue	وحدة	مدول
містити (що? де?)	to contain	contenir	يحتوي	متشکل بودن
метод інтервалів	method of intervals	method eintervalle	طريقة الفترات	روش فاصله ها
відмічати/відмітити (що? де?)	point out	pointer	حدد , لاحظ	علامت گذاری
означення	definition	définition	تعريف	تعريف

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

1. Що(Н.в.) є еквівалентним чому(Д.в.)

Рівняння $|x| = B$ є еквівалентним системі рівнянь.

2. Що(Н.в.) містить що(З.в.)

Рівняння містять змінну під знаком модуля

3. Що (Н.в.) перетворюється на що (З.в.)

Вираз $(x - 2)$ перетворюється на нуль при $x = 2$.

Завдання №2. Слухайте та читайте текст №2.

Текст №2

Рівняння, які містять невідоме під знаком модуля розв'язують, враховуючи означення та властивості модуля.

Наприклад, рівняння $|x| = a$, де $a \geq 0$, є еквівалентним двом рівнянням: $x = a$ та $-x = a$. Рівняння $|x| = a$, у якому $a < 0$, не має розв'язку.

Таким чином, рівняння $|x| = B$ є еквівалентним системі рівнянь $B \geq 0$:

$$\begin{cases} x = B & \text{при } x \geq 0, \\ -x = B & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Розв'яжемо декілька рівнянь, які містять невідоме (змінну) під знаком модуля:

Приклад 1. Розв'яжіть рівняння $|x + 3| = 4$.

Рівняння $|x + 3| = 4$ є еквівалентним двом рівнянням:

$$x + 3 = 4 \quad \text{та} \quad x + 3 = -4$$

$$x = 4 - 3 \qquad x = -4 - 3$$

$$x = 1 \qquad x = -7$$

Перевіримо: $|1 + 3| = |4| = 4$;

$$|-7 + 3| = |-4| = 4.$$

Дане рівняння має два корені: $x_1 = 1$ та $x_2 = -7$.

Відповідь: -7; 1

Приклад 2. Розв'яжіть рівняння: $|x + 3| = 3 + 2x$.

Якщо $x + 3 \geq 0$, то $x \geq -3$.

Якщо $x + 3 < 0$, то $x < -3$.

Отже, $x + 3 = 3 + 2x$

Отже, $x + 3 = -(3 + 2x)$

$$x - 2x = 3 - 3$$

$$x + 3 = -3 - 2x$$

$$-x = 0$$

$$x + 2x = -6$$

$$x = 0$$

$$x = -2.$$

Число -2 не є коренем рівняння, адже не задовольняє умові $x < -3$.

Можна перевірити: $|0 + 3| = 3 + 2 \cdot 0$; тобто $|3| = 3$.

$$|-2 + 3| \neq 3 + 2 \cdot (-2),$$

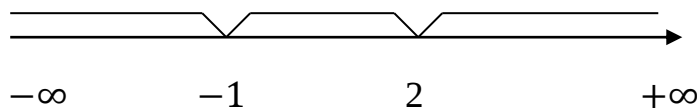
$$|1| \neq -1.$$

Відповідь: 0.

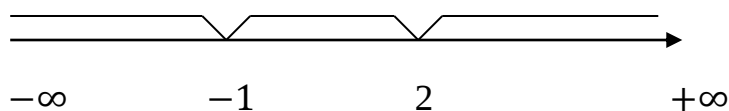
Приклад 3. Розв'язати рівняння $|x + 1| + |x - 2| = 3$.

Такі рівняння розв'язують методом інтервалу.

Дане рівняння містить два вирази під знаком модуля. Перший з них $(x + 1)$ перетворюється на нуль при $x = -1$, а другий $(x - 2)$ перетворюється на нуль при $x = 2$. Відмітимо точки -1 та 2 на числовій вісі. Отримаємо три інтервали:



Всередині кожного інтервалу вирази $x + 1$ та $x - 2$ мають певні знаки:



$x + 1$	-		+		+
$x - 2$	-		-		+

Розв'яжемо це рівняння на кожному інтервалі:

1) $x \in]-\infty; -1[$ $x + 1 < 0, \quad x - 2 < 0$

Рівняння має вигляд: $-(x + 1) - (x - 2) = 3,$

$$-x - 1 - x + 2 = 3,$$

$$-2x + 1 = 3,$$

$$-2x = 2,$$

$$x = -1.$$

$-1 \notin]-\infty; -1[$. Число -1 не належить інтервалу $]-\infty; -1[$, тому не є коренем даного рівняння. Це зайвий корінь.

2) $x \in [-1; 2[$ $x + 1 > 0; \quad x - 2 < 0.$

Рівняння має вигляд: $x + 1 - (x - 2) = 3$

$$x + 1 - x + 2 = 3$$

$$0x = 0.$$

$$x \in [-1; 2[$$

Це означає, що кожне число даного інтервалу є коренем даного рівняння.

3) $x \in [2; +\infty[$ $x + 1 > 0; \quad x - 2 > 0.$

Рівняння має вигляд: $x + 1 + x - 2 = 3$

$$2x - 1 = 3$$

$$2x = 4$$

$$x = 2.$$

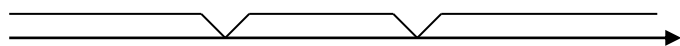
$2 \in [2; +\infty[$. Число 2 належить інтервалу $[2; +\infty[$, тому є коренем рівняння.

Відповідь: $[-1; 2]$

Приклад 4. Розв'язати рівняння $|1 - 3x| = |2x - 3|$.

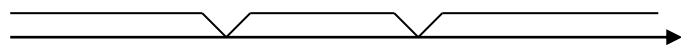
Запишемо рівняння у вигляді: $|1 - 3x| - |2x - 3| = 0$

Дане рівняння містить два вирази під знаком модуля. Перший з них $(1 - 3x)$ перетворюється на нуль при $x = \frac{1}{3}$, а другий $(2x - 3)$ перетворюється на нуль при $x = \frac{3}{2}$. Відмітимо точки $\frac{1}{3}$ та $\frac{3}{2}$ на числовій вісі. Отримаємо три інтервали:



$$-\infty \qquad \frac{1}{3} \qquad \frac{3}{2} \qquad +\infty$$

Всередині кожного інтервалу вирази $1 - 3x$ та $2x - 3$ мають певні знаки:



$$-\infty \qquad \frac{1}{3} \qquad \frac{3}{2} \qquad +\infty$$

$1 - 3x$	+		-		-
$2x - 3$	-		-		+

Розв'яжемо це рівняння на кожному інтервалі:

1) $x \in]-\infty; \frac{1}{3}[$ $1 - 3x > 0, \quad 2x - 3 < 0$

Рівняння має вигляд: $1 - 3x - (-2x + 3) = 0$

$$-2 - x = 0$$

$$x = -2$$

$-2 \in]-\infty; \frac{1}{3}[$. Число -2 належить інтервалу $]-\infty; \frac{1}{3}[$, тому є коренем рівняння.

2) $x \in [\frac{1}{3}; \frac{3}{2}[$ $1 - 3x < 0, \quad 2x - 3 < 0$

Рівняння має вигляд: $-1 + 3x - (-2x + 3) = 0$

$$5x - 4 = 0$$

$$x = \frac{4}{5}$$

$\frac{4}{5} \in [\frac{1}{3}; \frac{3}{2}[$. Число $\frac{4}{5}$ належить інтервалу $[\frac{1}{3}; \frac{3}{2}[$, тому є коренем рівняння.

3) $x \in [\frac{3}{2}; +\infty[$. $1 - 3x < 0, \quad 2x - 3 > 0$

Рівняння має вигляд: $-1 + 3x - (2x - 3) = 0$

$$x + 2 = 0$$

$$x = -2$$

$-2 \notin [\frac{3}{2}; +\infty[$. Число -2 не є коренем даного рівняння, адже -2 не належить інтервалу $[\frac{3}{2}; +\infty[$. Це зайвий корінь.

Відповідь: $-2; \frac{4}{5}$.

Приклад 5. Розв'язати рівняння $|2x - 2| + |6 - 3x| - |x| = 5$.

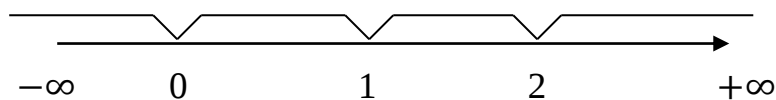
Дане рівняння містить три вирази під знаком модуля.

Перше з них $(2x - 2)$ перетворюється на нуль при $x = 1$.

Друге $(6 - 3x)$ перетворюється на нуль при $x = 2$.

Третє (x) перетворюється на нуль при $x = 0$.

Відмітимо ці точки на числовій вісі. Отримаємо чотири інтервали:



Всередині кожного інтервалу вирази $2x - 2$, $6 - 3x$ та x мають певні знаки:

	$-\infty$	0		1		2		$+\infty$
$2x - 2$	-		-		+		+	
$6 - 3x$	+		+		+		-	
x	-		+		+		+	

Розв'яжемо дане рівняння на кожному інтервалі:

1) $x \in]-\infty; 0[$ $2x - 2 < 0; \quad 6 - 3x > 0; \quad x < 0.$

Рівняння має вигляд: $-(2x - 2) + 6 - 3x + x = 5$

$$-2x + 2 + 6 - 3x + x = 5$$

$$-4x = -3$$

$$x = \frac{3}{4}$$

$\frac{3}{4} \notin]-\infty; 0[$, отже, число $\frac{3}{4}$ не є коренем рівняння на даному інтервалі.

2) $x \in [0; 1[$ $2x - 2 < 0; \quad 6 - 3x > 0; \quad x > 0.$

Рівняння має вигляд: $-(2x - 2) + 6 - 3x - x = 5$

$$-2x + 2 + 6 - 3x - x = 5$$

$$-6x = -3$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$\frac{1}{2} \in [0; 1[$, отже, число $\frac{1}{2}$ є коренем рівняння на даному інтервалі.

3) $x \in [1; 2[$ $2x - 2 > 0; \quad 6 - 3x > 0; \quad x > 0$

Рівняння має вигляд: $2x - 2 + 6 - 3x - x = 5$

$$-2x + 4 = 5$$

$$-2x = 1$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

$-\frac{1}{2} \notin [1; 2[$, отже число $-\frac{1}{2}$ не є коренем рівняння. Це зайвий корінь.

4) $x \in [2; +\infty[$ $2x - 2 > 0$; $6 - 3x < 0$; $x > 0$.

Рівняння має вигляд: $2x - 2 - (6 - 3x) - x = 5$

$$2x - 2 - 6 + 3x - x = 5$$

$$4x - 8 = 5$$

$$4x = 13$$

$$x = \frac{13}{4}$$

$\frac{13}{4} \in [2; +\infty[$, отже, число $\frac{13}{4}$ є коренем даного рівняння.

Відповідь: $\frac{1}{2}; \frac{13}{4}$.

Завдання №3. Виконайте вправи.

Вправа №1. Розв'яжіть рівняння:

а) $|x + 3| = 6 - 2x$; д) $|5x - 13| + |6 - x| = 7$;

б) $5 - x = |6 - 2x|$; е) $|x + 8| + |x - 2| = 6$;

в) $|x - 2| = |x + 4|$; є) $|x + 5| + |x - 8| = 13$;

г) $|2x - 6| = |x + 2|$; ж) $|2x + 3| + 2|x + 3| = 6$.

Заняття №3. Системи лінійних рівнянь з двома невідомими та способи їх розв'язання

Словник уроку:

Українська	Англійська	Французька	Арабська	Фарсі
система, -и	system	système	نظام	سیستم
перетворювати/перетворити (що? на що?)	to transform	transformer	تحول	انتقال
спосіб, -и	method	manière	طريقة	روش
спосіб підстановки	method of substitution	manière de substitution	طريقة الاستبدال	روش جایگزین
спосіб додавання	method of addition	manière de addition	طريقة الجمع	روش ترکیب
підставляти/підставити що? у що?	to substitute	substituer	استبدال	جایگزین
еквівалентний, -а, -е, -і	equivalent	équivalent	معادل	معادل
виражати/виразити що?	to express	exprimer	يعبر	بیان کردن

зрівнювати/зрівняти що?	to equate	égaliser;	يعادل	برابر
пропорційний, -а, -е, -і	proportional	proportionné	نسبي	متناسب
невідомо величина/ невідоме / змінна	unknown quantity	quantité inconnue	كمية غير معروفة	مقدار ناشناخته

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

1. **Що(н.в.)** може містити **що(з.в.)**

Рівняння може містити декілька невідомих/змінних.

2. **Чим(О.в.)** називається **що(н.в.)**

Розв'язком системи називається **пара** чисел $(x; y)$.

3. **Чим(о.в.)** є **що(н.в.)**.

Розв'язками рівняння $x + 2y = 3$ є **пари** чисел $(-1; 2)$, $(3; 0)$, $(1; 1)$.

4. Виразити **що(з.в.)** через **що(з.в.)**

Потрібно виразити **одну змінну** через **іншу** (наприклад, x через y).

Завдання №1. Слухайте та читайте текст №3.

Текст №3

Рівняння може містити декілька невідомих величин = змінних.

Наприклад: $x + 2y = 3$. Це рівняння з двома невідомими/змінними x та y .

Розв'язком рівняння з двома, трьома та більше невідомими називають пару $(x; y)$, трійку $(x; y; z)$ і т. і. значень невідомих, які перетворюють дане рівняння на вірну рівність.

Наприклад: розв'язками рівняння $x + 2y = 3$ є пари чисел $(0; \frac{3}{2})$, $(3; 0)$, $(1; 1)$ та інші. Одне рівняння з двома та більше невідомими має нескінчену кількість розв'язків.

Рівняння з декількома невідомими мають такі ж самі властивості, як і рівняння з одним невідомим.

Сукупність декількох рівнянь з двома та більше невідомими називають системою рівнянь.

Система двох лінійних рівнянь з двома невідомими має вигляд:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases}$$

Де x та y – невідомі величини (змінні);

a_1, a_2, b_1, b_2 – коефіцієнти системи;

c_1, c_2 – вільні члени;

$\begin{cases} \end{cases}$ – знак системи.

Розв'язком системи з двома невідомими називається пара чисел $(x_0; y_0)$, яка є розв'язком кожного рівняння.

Розв'язати систему – означає знайти множину її розв'язків.

Дві системи вважають еквівалентними, якщо розв'язки однієї системи є розв'язками іншої та навпаки.

Систему двох лінійних рівнянь з двома невідомими можна розв'язати декількома способами.

Спосіб підстановки

- З одного рівняння системи необхідно виразити одне невідоме через друге (наприклад, x через y);
- Отриманий вираз підставити у друге рівняння системи.
Отримаємо одне рівняння з одним невідомим.
- Розв'язати дане рівняння (знайти y);
- Підставити значення y у перше рівняння та знайти x .

$$\begin{cases} 6x + y = 6, \\ 4x + 3y = 11. \end{cases}$$

Виразимо з першого рівняння y : $y = 6 - 6x$. Отриманий вираз підставимо у друге рівняння:

$$\begin{cases} y = 6 - 6x, \\ 4x + 3(6 - 6x) = 11, \text{ звідси} \end{cases} \quad \begin{cases} y = 6 - 6x, \\ 4x + 18 - 18x = 11, \end{cases}$$
$$\begin{cases} -14x = -7 \\ y = 6 - 6x \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 3. \end{cases} \quad \text{Відповідь: } \left(\frac{1}{2}; 3\right).$$

Спосіб додавання

- Спочатку необхідно прирівняти модулі коефіцієнтів поряд з будь-яким невідомим (наприклад, поряд з y);
- Додати або відняти отримані рівняння та знайти одне невідоме;
- Підставити відоме значення до одного з рівнянь системи та знайти друге невідоме.

$$\begin{cases} 6x + y = 6, \\ 4x + 3y = 11, \text{ (помножимо перше рівняння на 3)} \\ 18x + 3y = 18, \\ 4x + 3y = 11, \text{ (віднімемо друге рівняння з першого)} \end{cases}$$

$$(18x - 4x) + (3y - 3y) = 18 - 11,$$

$$14x + 0 = 7$$

$$x = \frac{1}{2} \quad (\text{підставимо значення } \frac{1}{2} \text{ у перше рівняння та знайдемо } y):$$

$$\begin{cases} 6 \cdot \frac{1}{2} + y = 6 \\ y = 3. \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2}, \\ y = 3. \end{cases} \quad \text{Відповідь: } \left(\frac{1}{2}; 3\right).$$

Розв'язання системи за допомогою визначника (формули Крамера)

$$\text{Система } \begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases} \text{ має розв'язки:}$$

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \quad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

$$\text{Якщо позначити } \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1,$$

то розв'язок системи можна записати у вигляді $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$, $y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$ (якщо $\Delta \neq 0$).

Це формули Крамера.

Розв'яжемо систему рівнянь за допомогою метода Крамера:

$$\begin{cases} 6x + y = 6, \\ 4x + 3y = 11, \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 6 \cdot 3 - 1 \cdot 4 = 14;$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 11 & 3 \end{vmatrix} = 6 \cdot 3 - 1 \cdot 11 = 7; \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 6 & 6 \\ 4 & 11 \end{vmatrix} = 6 \cdot 11 - 6 \cdot 4 = 42.$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{42}{14} = 3. \text{ Відповідь: } \left(\frac{1}{2}; 3\right).$$

Дослідження системи двох лінійних рівнянь з двома невідомими.

Система
$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases}$$
 має розв'язки:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

1) Якщо $\Delta \neq 0$, то система має єдиний розв'язок.

2) Якщо $\Delta = 0$ але $\Delta_x \neq 0$ або $\Delta_y \neq 0$, то система не має розв'язків.

Умова $\Delta = 0$ означає, що $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, або $a_1b_2 = a_2b_1$ або $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$

($a_2 \neq 0, b_2 \neq 0$), тобто коефіцієнти системи пропорційні.

3) Якщо $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$, то система має нескінчену кількість розв'язків.

Умова $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$ означає, що коефіцієнти системи та вільні члени пропорційні $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$.

Приклад 1.
$$\begin{cases} 2x - 3y = 4, \\ 3x + 4y = -1. \end{cases}$$

Коефіцієнти системи не є пропорційними: $\frac{2}{3} \neq \frac{-3}{4}$, отже, система має єдиний розв'язок.

Приклад 2.
$$\begin{cases} 5x + 3y = 1, \\ 10x + 6y = 3. \end{cases}$$

Коефіцієнти системи пропорційні а вільні члени їм не пропорційні:

$\frac{5}{10} = \frac{3}{6} \neq \frac{1}{3}$, отже, система не має розв'язків.

Приклад 3.
$$\begin{cases} 2x + 5y = 6, \\ 6x + 10y = 12. \end{cases}$$

Коефіцієнти системи та вільні члени пропорційні: $\frac{2}{6} = \frac{5}{10} = \frac{6}{12}$, отже, система має нескінчену кількість розв'язків.

Завдання №2. Виконайте вправи.

Вправа №1. Дайте відповіді на запитання.

1. Що називається системою рівнянь?
2. Що є розв'язком системи рівнянь з двома невідомими?
3. Які способи розв'язування систем лінійних рівнянь ви знаєте?

Вправа №2. Розв'яжіть системи рівнянь. Вкажіть спосіб розв'язання.

а) $\begin{cases} x + y = 5, \\ 2x + 3y = 13; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 15x - 16y = 24, \\ 3x = 4y; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + 2y = 11, \\ 5x - 3y = 3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 14x + 9y = 9, \\ 9x + 4y = 4; \end{cases}$

д) $\begin{cases} \frac{2x}{9} + \frac{y}{4} = 11, \\ \frac{5x}{12} + \frac{y}{3} = 19; \end{cases}$ е) $\begin{cases} \frac{2x-1}{5} + \frac{3y-2}{4} = 2, \\ \frac{3x+1}{5} - \frac{3y+2}{4} = 0. \end{cases}$

Вправа №3. Розв'яжіть системи рівнянь способом підстановки:

а) $\begin{cases} x + y = 13, \\ 2x - y = 12,5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3y - 8x = 15, \\ 7x - 2y = 0. \end{cases}$

Вправа №4. Розв'яжіть системи рівнянь способом додавання:

а) $\begin{cases} 16x - 27y = 20, \\ 5x + 18y = 41,5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 18x - 21y = 2, \\ 24x - 15y = 7. \end{cases}$

Заняття № 4. Квадратні рівняння. Теорема Вієта.

Розкладання квадратного тричлена на множники

Словник уроку:

Українська	Англійська	Французька	Арабська	Фарсі
квадратне рівняння	quadratic equation	Équation quadratique	معادلة من الدرجة الثانية	معادله درجه دوم
неповне квадратне рівняння	incomplete quadratic equation	incomplet equation quadratique	معادلة كاملة من الدرجة الثانية	معادله درجه دوم ناقص
повне квадратне рівняння	complete quadratic equation	complet equation quadratique	معادلة مقدمة من الدرجة الثانية	معادله درجه دوم كامل
зведене квадратне рівняння	reduced form of quadratic equation	réduit equation quadratique	نشر	با توجه به معادله درجه دوم
розкласти/розложити (що? як?)	to decompose	factoriser	التمايز	گسترش
дискримінант, -и	discriminant	discriminant	متعدد الحدود من الدرجة الثانية	تفكيك
квадратний тричлен	quadratic trinomial	trinôme duseconddegré	يخصص	سه جمله ای درجه دوم
виділяти/виділити (що?)	separate out	mettre à part	تخصيص من الدرجة الثانية	اختصاص
виділення повного квадрату	separation of complete square	mettre à part carré parfait	معامل	تخصيص كل مربع
коефіцієнт, -и	multiplying factor	facteur	معادلة من الدرجة الثانية	ضريب
залежати (від чого)	depend	dépendre	تعتمد	بستگی دارد

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ

1. **Що (н.в.)** називається **чим (о.в.)**

Числа a, b, c називаються коефіцієнтами квадратного рівняння.

2. **Що(н.в.)** залежить від **чого(р.в.)**

Число коренів квадратного рівняння залежить від **знаку** дискримінанту.

Завдання №1. Слухайте і читайте текст №4.

Текст №4

Квадратне рівняння. Теорема Вієта

Загальний вигляд квадратного рівняння (рівняння другого степеня):

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

a, b, c – дані числа ($a \neq 0$);

x – невідоме (змінна).

Числа a, b, c називаються **коефіцієнтами** квадратного рівняння.

Квадратне рівняння називають **неповним**, якщо хоча б один з коефіцієнтів дорівнює нулю:

1) $ax^2 = 0, (a \neq 0)$; Рівняння $ax^2 = 0, (a \neq 0)$ має єдиний корінь $x = 0$.

2) $ax^2 + c = 0, (a \neq 0, c \neq 0)$;

Рівняння $ax^2 + c = 0, (a \neq 0, c \neq 0)$ розв'язуємо в такий спосіб:

$$ax^2 + c = 0,$$

$$ax^2 = -c,$$

$$x^2 = \sqrt{-\frac{c}{a}};$$

Якщо вираз $-\frac{c}{a} < 0$, то робимо висновок, що рівняння не має дійсних коренів.

Якщо вираз $-\frac{c}{a} > 0$, то рівняння має два корені: $x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}; x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$.

Наприклад, неповне квадратне рівняння $x^2 + 4 = 0$ не має дійсних коренів, адже $x^2 \neq -4$, а рівняння $x^2 - 4 = 0$ має два дійсних корені $x_{1,2} = \pm 2$.

3) $ax^2 + bx = 0, (a \neq 0, b \neq 0)$.

Рівняння $ax^2 + bx = 0, (a \neq 0, b \neq 0)$ розв'язують розкладанням лівої частини на множники: $x(ax + b) = 0$,

$$x_1 = 0 \text{ або } x_2 = -\frac{b}{a}.$$

Наприклад, $3x^2 - 8x = 0$.

$$x(3x - 8) = 0,$$

$$x_1 = 0, x_2 = \frac{8}{3}$$

4) Повне квадратне рівняння має вигляд: $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)

Виділимо повний квадрат, і запишемо рівняння у такому вигляді:

$$ax^2 + bx + c = a \left(x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 \right) + c =$$

$$= a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + c.$$

$$a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + c = 0,$$

$$a \neq 0, \text{ тому } \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Вираз $b^2 - 4ac$ називається **дискримінантом** квадратного рівняння

$ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) та позначається літерою **D**.

$$D = b^2 - 4ac.$$

Можливі три випадки: $D < 0$, $D = 0$, $D > 0$. Розглянемо їх:

1) $D < 0$, тобто $b^2 - 4ac < 0$; $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} < 0$,

отже рівняння $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ та рівняння $ax^2 + bx + c = 0$

не мають дійсних коренів.

2) $D = 0$, тобто $b^2 - 4ac = 0$.

В цьому випадку рівняння $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ має вигляд $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = 0$.

Звідси $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$. Тобто, якщо дискримінант дорівнює нулю, то

квадратне рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ має два рівні корені.

3) $D > 0$, тобто $b^2 - 4ac > 0$.

В цьому випадку рівняння $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ можна записати у вигляді:

$$\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right)^2, \text{ отже } x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \text{ Звідси } x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Остаточно $x_{1,2} = \frac{-b \pm D}{2a}$. Тобто, якщо дискримінант додатний ($D > 0$), то квадратне рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ має два різні корені.

Приклад 1. Розв'яжіть рівняння $10x^2 - 3x - 1 = 0$.

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 10 \cdot (-1) = 9 + 40 = 49 > 0.$$

$$x_1 = \frac{3 + \sqrt{49}}{2 \cdot 10} = \frac{3+7}{20} = \frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{3 - \sqrt{49}}{2 \cdot 10} = \frac{3-7}{20} = -\frac{1}{5}$$

Відповідь: $-\frac{1}{5}; \frac{1}{2}$.

Квадратне рівняння, яке має вигляд $x^2 + px + q = 0$ називається **зведеним**.

Корені квадратного рівняння пов'язані з його коефіцієнтами теоремою Вієта.

Теорема Вієта: якщо x_1 та x_2 – корені зведеного квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0$, то
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 \cdot x_2 = q. \end{cases}$$

(Сума коренів зведеного квадратного рівняння (x_1 та x_2) дорівнює другому коефіцієнту з протилежним знаком ($-p$), а добуток коренів дорівнює вільному члену (q)).

Можна перевірити, що для квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, за теоремою Вієта $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$, якщо x_1 та x_2 – корені квадратного рівняння.

Теорему Вієта можна застосувати, щоб скласти квадратне рівняння, знаючи його корені.

Наприклад: $x_1 = 3, x_2 = 5$.

$$p = -(x_1 + x_2) = -(3 + 5) = -8;$$

$$q = x_1 \cdot x_2 = 3 \cdot 5 = 15.$$

$$\text{Отримаємо: } x^2 - 8x + 15 = 0.$$

Приклад 2. Не розв'язуючи рівняння $x^2 - 5x + 6 = 0$,

обчисліть вираз $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$.

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{5}{6}.$$

Завдання №2. Слухайте і читайте текст №5.

Текст №5

Розкладання квадратного тричлена на множники

Квадратний тричлен – многочлен другого степеня $ax^2 + bx + c$ можна розкласти на множники, тобто представити у вигляді добутку.

Якщо x_1 та x_2 – корені квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, а отже корені квадратного тричлена, то виконується рівність:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Знаки коренів квадратного тричлена			
Одного знака, якщо $\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} > 0, \\ D = b^2 - 4ac > 0 \end{cases}$	Різних знаків, якщо $\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} < 0, \\ D = b^2 - 4ac > 0 \end{cases}$	Додатні, якщо $\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} > 0, \\ x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} > 0, \\ D = b^2 - 4ac > 0 \end{cases}$	Від'ємні, якщо $\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} > 0, \\ x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} < 0, \\ D = b^2 - 4ac > 0 \end{cases}$

Приклад 3. Спростіть вираз $\frac{2x^2 - 5x + 2}{4 - x^2}$.

Знайдемо корені квадратного тричлена $2x^2 - 5x + 2$. Для цього розв'яжемо квадратне рівняння $2x^2 - 5x + 2 = 0$.

$$D = 25 - 16 = 9 > 0,$$

$$x_1 = 2, \quad x_2 = \frac{1}{2}.$$

Квадратний тричлен у чисельнику дробу розкладемо на множники (запишемо у вигляді добутку): $2x^2 - 5x + 2 = 2(x - 2)\left(x - \frac{1}{2}\right) = (x - 2)(2x - 1)$.

У знаменнику застосуємо формули скороченого множення (різницю квадратів):

$$4 - x^2 = (2 - x)(2 + x).$$

$$\text{Отже, } \frac{2x^2 - 5x + 2}{4 - x^2} = \frac{(x - 2)(2x - 1)}{(2 - x)(2 + x)} = -\frac{2x - 1}{2 + x} = \frac{1 - 2x}{2 + x}.$$

Завдання №3. Виконайте вправи.

Вправа №1. Дайте відповіді на запитання.

1. Який загальний вигляд квадратного рівняння? Поясніть усі величини.
2. Який вираз називається дискримінантом?
3. За якими формулами знаходять корені квадратного рівняння?
4. Яке квадратне рівняння називається неповним?
5. Сформулюйте теорему Вієта. Коли її застосовують?

Вправа №2. Скільки розв'язків має рівняння $-5x^2 - 7x = 13$?

Вправа №3. Розв'яжіть рівняння.

а) $5x^2 - 80 = 0$;

в) $x^2 - \frac{1}{3}x = 0$;

б) $10(x - 2) = 19 = (5x - 1)(5x + 1)$;

г) $\frac{5x^2+9}{6} - \frac{4x^2-9}{5} = 3$.

Вправа №4. Корені квадратного рівняння $25x^2 - 30x + c = 0$ мають властивість $x_1 - x_2 = 2$. Знайдіть c .

Вправа №5. Корені квадратного рівняння $x^2 + px + 12 = 0$ мають властивість $x_1 - x_2 = 1$. Знайдіть p .

Вправа №6. Розв'яжіть рівняння.

а) $4x^2 - 17x - 15 = 0$;

б) $10x^2 - 3x - 1 = 0$;

в) $\frac{5(x-1)}{4} = \frac{x}{6} + \frac{6}{x}$;

г) $\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x+2} = 1$;

д) $\frac{6x}{x+3} + 2 = \frac{x+3}{x}$;

е) $(4x - 1)(x - 3) - 5x(x - 2) = 6x - x^2$.

Вправа №7. Розкладіть на множники:

а) $-x^2 - 14x - 33$;

в) $-3x^2 + 18x - 15$;

б) $2x^2 + 31x + 120$;

г) $8 - 2x - x^2$.

Вправа №7. Скоротіть дроб:

а) $\frac{x^2+6x-91}{x^2+8x-105}$;

б) $\frac{6m^2+11m+3}{3+5m-12m^2}$.

Заняття №5. Біквadratні рівняння. Ірраціональні рівняння

Словник уроку:

Українська	Англійська	Французька	Арабська	Фарсі
біквadratне рівняння	bequadratic equation	Équation quadratique	المعادلة الرباعية	توان چهارم
тричлен, -и	trinomial	trinôme	ثلاثي الحدود	سه جمله ای
зведення (чого?) до чого?	reduction	réduction	تقريب	اظهار
заміна змінних	substitution of variables	substitution de variables	تغيير المتغيرات	تغيير متغير
ірраціональне рівняння	irrational equation	equation irrationnel	معادلة غير منطقية	معادله غير منطقی
містити (що?)	to contain	contenir	يحتوي على	شامل شدن
зводити/звести (що? до чого?)	to reduce	réduire	اختزل	كاهش دادن
піднесення до квадрату	squaring	carré	تربيع	مربع زدن
підстановка, -и	substitution	substitution	الاستبدال	تعويض
відокремлювати/ відокремити (що?)	isolate	isoler	عزل	منزوی
радикал, -и	radical	radical	أصولي	افراطی
область допустимих значень рівняння	range of valid values	plage de valeurs valides	نطاق القيم الصالحة	دامنه مقادير معتبر
Є - належати (чому?)	belong	appartenir	تنتمي	تعلق داشتن
позбавлятися/ позбавитися (від чого)	get rid of	se débarrasser de	تخلص من	خلاص شدن از شر

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ

1. Що(н.в.) зводиться до чого(р.в.)

Тричленне рівняння, яке має вигляд $ax^{2m} + bx^m + c = 0$ зводиться до квадратного рівняння $at^2 + bt + c = 0$.

2. Що(н.в.) називається чим(о.в.)

Тричленне рівняння, яке має вигляд $ax^4 + bx^2 + c = 0$ називається біквadratним.

Завдання №1. Слухайте та читайте текст №6.

Текст №6

Біквadratні рівняння

Тричленне рівняння, яке має вигляд $ax^{2m} + bx^m + c = 0$, де $m > 1$, підстановкою $x^m = t$ зводиться до квадратного рівняння $at^2 + bt + c = 0$.

Якщо t_1 та t_2 – корені цього квадратного рівняння, то корені вихідного рівняння знайдемо з рівностей $x^m = t_1$ та $x^m = t_2$.

Якщо $m = 2$, то тричленне рівняння $ax^{2m} + bx^m + c = 0$ має вигляд $ax^4 + bx^2 + c = 0$ і називається **біквдратним**.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$.

Зробимо заміну: $x^2 = y$. Отримаємо квадратне рівняння $4y^2 - 5y + 1 = 0$.

Рівняння має два корені: $y_1 = 1$ та $y_2 = \frac{1}{4}$

Знайдемо корені вихідного рівняння: $x^2 = 1$ та $x^2 = \frac{1}{4}$

$$x_{1,2} = \pm 1 \quad x_{3,4} = \pm \frac{1}{2}.$$

Відповідь: $\pm \frac{1}{2}; \pm 1$.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $(x - \sqrt{3})^4 + 3(x - \sqrt{3})^2 - 4 = 0$.

Зробимо заміну: $(x - \sqrt{3})^2 = t$.

Отримаємо квадратне рівняння відносно t : $t^2 + 3t - 4 = 0$.

Його корені: $t_1 = -4$, $t_2 = 1$.

Якщо $t_1 = -4$, то $(x - \sqrt{3})^2 = -4$. Це рівняння не має коренів.

Якщо $t_2 = 1$, то $(x - \sqrt{3})^2 = 1$, $x - \sqrt{3} = 1$ та $x - \sqrt{3} = -1$

$$x_1 = 1 + \sqrt{3} \quad x_2 = -1 + \sqrt{3}$$

Відповідь: $-1 + \sqrt{3}; 1 + \sqrt{3}$.

Завдання №2. Слухайте і читайте текст №7.

Текст №7

Ірраціональні рівняння

Рівняння, які мають змінну під знаком кореня, називаються **ірраціональними**.

Приклади ірраціональних рівнянь: $\sqrt{x+3} = 5$; $3x + \sqrt{x} = 1$;

$$\sqrt{x+4} + \sqrt{x+9} = 1; \quad \sqrt[3]{x-1} = 3.$$

Розв'язуючи ірраціональні рівняння, розглядають лише арифметичні корені. Рівняння $\sqrt{2x} + \sqrt{x} = 0$, $\sqrt{x-1} = -2$ не мають коренів.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $\sqrt{x+3} = 4$.

Знайдемо область допустимих значень (ОДЗ) цього рівняння:

$$x + 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3. \quad x \in [-3; +\infty[.$$

Позбавимось від кореня – піднесемо до квадрату обидві частини рівняння:

$$(\sqrt{x+3})^2 = 4^2$$

$$x + 3 = 16,$$

$$x = 13. \quad \text{Даний корінь належить ОДЗ: } 13 \in [-3; +\infty[.$$

$$\text{Зробимо перевірку: } \sqrt{13+3} = \sqrt{16} = 4.$$

Відповідь: 13.

Приклад 4. Розв'язати рівняння $3x - 10\sqrt{x+1} + 6 = 0$.

$$\text{ОДЗ рівняння: } \begin{cases} x+1 \geq 0, \\ 3x+6 \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq -1 \\ x \geq -2 \end{cases} \quad \text{ОДЗ: } x \in [-1; +\infty[.$$

Відокремимо/ізолюємо радикал у праву (ліву) частину та піднесемо до квадрату обидві частини рівняння:

$$3x + 6 = 10\sqrt{x+1}$$

$$(3x + 6)^2 = (10\sqrt{x+1})^2$$

$$9x^2 + 36x + 36 = 100(x + 1)$$

$$9x^2 - 64x - 64 = 0,$$

$$D = (-64)^2 - 4 \cdot 9 \cdot (-64) = 4096 + 2304 = 6400.$$

$$x_1 = \frac{64+80}{18} = 8, \quad x_2 = \frac{64-80}{18} = -\frac{8}{9}.$$

Обидва корені належать ОДЗ рівняння: $-\frac{8}{9} \in [-1; +\infty[, 8 \in [-1; +\infty[$,

Відповідь: $-\frac{8}{9}; 8$.

Приклад 5. Розв'язати рівняння $\sqrt{2x-4} - \sqrt{x+5} = 1$.

Запишемо рівняння у вигляді: $\sqrt{2x-4} = \sqrt{x+5} + 1$.

Піднесемо до квадрату обидві частини: $(\sqrt{2x-4})^2 = (\sqrt{x+5} + 1)^2$

$$2x - 4 = x + 5 + 2\sqrt{x+5} + 1,$$

$$x - 10 = 2\sqrt{x+5}$$

$$(x - 10)^2 = 4(x + 5)$$

$$x^2 - 20x + 100 = 4x + 20,$$

$$x^2 - 24x + 80 = 0,$$

$$D = (-24)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 80 = 256,$$

$$x_1 = \frac{24+16}{2} = 20, \quad x_2 = \frac{24-16}{2} = 4$$

Зробимо перевірку – підставимо по черзі отримані корені в умову:

$$\sqrt{2 \cdot 20 - 4} - \sqrt{20 + 5} = 6 - 5 = 1. \quad 20 \text{ є коренем рівняння.}$$

$$\sqrt{2 \cdot 4 - 4} - \sqrt{4 + 5} = 2 - 3 = -1.$$

$$-1 \neq 1. \quad 4 - \text{зайвий корінь.} \quad \text{Відповідь: } 20.$$

Приклад 6. Розв'язати рівняння $\sqrt{2x+7} + \sqrt{3x-18} = \sqrt{7x+1}$.

$$\text{Знайдемо ОДЗ: } 2x+7 \geq 0, \quad 2x \geq -7, \quad x \geq -3,5$$

$$3x-18 \geq 0, \quad 3x \geq 18, \quad x \geq 6,$$

$$7x+1 \geq 0; \quad 7x \geq -1; \quad x \geq -\frac{1}{7}.$$

$$\text{ОДЗ: } x \in [6; +\infty[.$$

Піднесемо до квадрату обидві частини рівняння:

$$(\sqrt{2x+7} + \sqrt{3x-18})^2 = 7x+1,$$

$$5x-11+2\sqrt{6x^2-15x-126} = 7x+1;$$

Відокремимо радикал у ліву частину та знову піднесемо до квадрату:

$$2\sqrt{6x^2-15x-126} = 2x+12,$$

$$\sqrt{6x^2-15x-126} = x+6,$$

$$6x^2-15x-126 = x^2+12x+36;$$

Розв'яжемо квадратне рівняння: $5x^2-27x-162=0$.

$$D = (-27)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-162) = 3969;$$

$$x_1 = \frac{27+63}{10} = 9; \quad x_2 = \frac{27-63}{10} = -3,6.$$

$-3,6$ - зайвий корінь, адже $-3,6 \notin [6; +\infty[$.

$$\text{Перевірка: } \sqrt{2 \cdot 9 + 7} + \sqrt{3 \cdot 9 - 18} = \sqrt{7 \cdot 9 + 1};$$

$$\sqrt{25} + \sqrt{9} = \sqrt{64}; \quad 8 \equiv 8.$$

Відповідь: 9.

Завдання №3. Виконайте вправи.

Вправа №1. Дайте відповіді на запитання:

1. Які рівняння називаються біквадратними?
2. Які рівняння називаються ірраціональними?

Вправа №2. Розв'яжіть рівняння.

- а) $x^4 - 4x^2 - 1 = 0$; в) $x^4 - 50x^2 + 49 = 0$;
 б) $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$; г) $(x + \sqrt{3})^4 - 5(x + \sqrt{3})^2 + 4 = 0$.

Вправа №3. Розв'яжіть ірраціональні рівняння.

- а) $1 + \sqrt{2x + 7} = x - 3$; б) $3 + 2\sqrt{x} = 5$;
 в) $x - \sqrt{x + 1} = 5$; г) $5\sqrt{x} - 7 = 3\sqrt{x} - 1$;
 д) $\sqrt{x - 9} - \sqrt{x - 18} = 1$; е) $\sqrt{x + 3} + \sqrt{3x - 2} = 7$;
 є) $\sqrt{5x - 1} - \sqrt{3x + 19} = 0$; ж) $\sqrt{2x - 9} - \sqrt{6 - x} = 0$.

Заняття №6. Нерівності. Числові нерівності та їх властивості Лінійні нерівності

Словник уроку:

українська	англійська	французька	арабська	фарсі
нерівність, -і	inequation	inéquation	غير متساوي	نابرابری
числова нерівність	inequation numeral	inéquation numéral	عدم المساواة العددية	نابرابری عددی
утворювати/утворити (що?)	workout	dessiner	يشكل	تشکیل شدن
переносити/перенести (що? куди?)	to transfer	transférer	ينقل	انتقال دادن
задовольняти/задовольнити (що?чому?)	satisfy the conditions	satisfaire à unecondition	يلبي	قانع شدن
сполучати/сполучити (що? чим?)	to connect	se connecter	للاتصال	برای اتصال
збігатися/збігтися (з чим?)	coincide	coïncider	تزامن	مصادف شدن
рівносильний (еквівалентний)	equivalent	equivalent	نظير	معادل آن
проміжок/проміжки	interval	intervalle	فترة	فاصله
зводити/звести (що? до чого?)	to reduce	réduire	لتقليل	کاهش دادن
доводити/довести (що?)	prove	prouver	إثبات	ثابت کردن
множина, -и	set	ensemble	جلس	تنظيم

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ

1. Що (н.в.) утворює що(з.в.)

Два вирази, сполучені знаком $>$, $<$, $\geq$, $\leq$ утворюють нерівність.

2. Чим(о.в.) називається що(н.в.)

Розв'язком нерівності називається значення змінної, при якому нерівність перетворюється на правильну числову нерівність.

3. Що(н.в.) зводиться до чого(р.в.)

Подвійні нерівності зводяться до розв'язування систем нерівностей.

4. Що(н.в.) складається з чого(р.в.)

Нерівність складається з двох частин: лівої (А) та правої (В).

Завдання №1. Слухайте і читайте текст №8.

Текст №8

Два дійсних числа або алгебраїчні вирази, сполучені знаком $>$ (більше), $<$ (менше), $\geq$ (не менше), $\leq$ (не більше) утворюють нерівність.

$$A > B, \quad A < B, \quad A \geq B, \quad A \leq B.$$

Нерівність складається з двох частин : лівої (А) та правої (В).

Якщо обидві частини нерівності – числа, то нерівність є **числовою**. Такі нерівності можуть бути правильними ($-1 < 8$; $10 > 6$) та неправильними ($\sqrt{2} > 4$; $-3 < 7$).

Два вирази зі змінною, сполучені знаком $>$, $<$, $\geq$, $\leq$ називають **нерівністю зі змінною**.

Розв'язком нерівності називається значення змінної, при якому нерівність перетворюється на правильну числову нерівність.

Розв'язати нерівність означає знайти усі її розв'язки або довести, що їх немає.

Рівносильні нерівності

Дві нерівності називаються **рівносильними**, якщо множини їх розв'язків збігаються.

1. Для будь-яких чисел **А, В** та **m** рівносильні нерівності:

$$A > B \quad i \quad A + m > B + m \quad A > B \quad i \quad A - m > B - m.$$

2. Для будь-яких чисел **А, В** та **m>0** рівносильні нерівності:

$$A > B \quad i \quad A \cdot m > B \cdot m \quad A > B \quad i \quad \frac{A}{m} > \frac{B}{m}.$$

3. Для будь-яких чисел **А, В** та **m<0** рівносильні нерівності:

$$A > B \quad i \quad A \cdot m < B \cdot m \quad A > B \quad i \quad \frac{A}{m} < \frac{B}{m}.$$

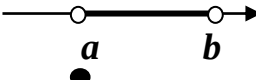
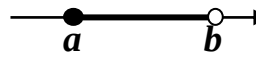
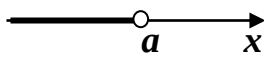
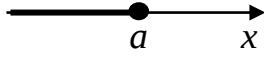
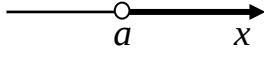
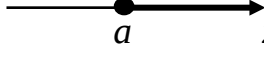
Наприклад: $x + 1 > 5 \Leftrightarrow x > 4$; $\frac{x}{3} > 5 \Leftrightarrow x > 15$; $-2x > 6 \Leftrightarrow x < 3$.

ОДЗ нерівностей:

$$A \cdot B \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0, \\ B \geq 0; \end{cases} \quad A \cdot B \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ B \leq 0; \end{cases} \quad \frac{A}{B} \geq \frac{C}{D} \Leftrightarrow \begin{cases} A \cdot D \geq B \cdot C \\ B \cdot D > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A \leq 0, \\ B \leq 0; \end{cases} \quad \frac{A}{B} \leq \frac{C}{D} \Leftrightarrow \begin{cases} A \cdot D \leq B \cdot C \\ B \cdot D < 0 \end{cases}$$

Розв'язки нерівностей та їх позначення:

Назва	Позначення	Зображення	Запис у вигляді нерівності
Числова пряма	$(-\infty; +\infty), R$		$-\infty < x < +\infty$
Замкнутий проміжок (відрізок)	$[a; b]$		$a \leq x \leq b$
Відкритий проміжок (інтервал)	$]a; b[$		$a < x < b$
Напіввідкритий проміжок	$[a; b[$		$a \leq x < b$
	$]a; b]$		$a < x \leq b$
Нескінчений проміжок (промінь)	$(-\infty; a)$		$x < a$
	$] -\infty; a]$		$x \leq a$
	$(a; +\infty)$		$x > a$
	$[a; +\infty[$		$x \geq a$

Завдання №2. Виконайте вправи.

Вправа №1. Дайте відповіді на запитання.

1. Що називається нерівністю?
2. Які нерівності називаються рівносильними?
3. Сформулюйте властивості рівносильних нерівностей.

Вправа №2. Напишіть українською мовою:

- а) $x \geq a$, $x \leq a$, в) $[-3; 49]$, д) $x \notin [-1; 24]$.
 б) $]0; 8[$, г) $x \in (2; +\infty)$,

Завдання №3. Слухайте і читайте текст №9.

Текст №9

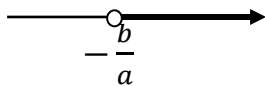
Лінійні нерівності з однією змінною

Нерівність першого степеня або лінійна нерівність з однією змінною має вигляд: $ax + b > 0$ ($ax + b < 0$, $ax + b \geq 0$, $ax + b \leq 0$).

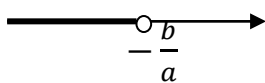
Для розв'язання нерівності переносимо число з лівої частини у праву.

Отримаємо: $ax > -b$.

Якщо $a > 0$, то $x > -\frac{b}{a}$;



Якщо $a < 0$, то $x < -\frac{b}{a}$;



Приклад 1. Розв'язати нерівність $\frac{x-1}{3} - \frac{x+2}{4} > \frac{x-2}{12} - \frac{x}{3}$.

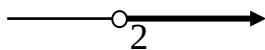
Помножимо ліву та праву частини на 12. Отримаємо:

$$4x - 4 - 3x - 6 > x - 2 - 4x$$

$$x - 10 > -3x - 2$$

$$4x > 8$$

$$x > 2$$



Відповідь: $x \in (2; +\infty)$.

Подвійні нерівності.

Подвійні нерівності:

$$a < x < b$$

$$a \leq x < b$$

$$a < x \leq b$$

$$a \leq x \leq b$$

зводяться до розв'язування систем нерівностей:

$$\begin{cases} x > a, \\ x < b, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq a, \\ x < b, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > a, \\ x \leq b, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq a, \\ x \leq b. \end{cases}$$

Завдання №4. Виконайте вправи.

Вправа №3. Дайте відповіді на запитання.

1. Який вигляд має лінійна нерівність з однією змінною?
2. Що означає фраза розв'язати нерівність?

Вправа №4. Для яких значень змінної x значення виразу $1 - 2x$ більше, ніж 5?

- а) $x > -2$; б) $x > 2$; в) $x < -2$; г) $x < 2$.

Вправа №5. Скільки цілих чисел задовольняють подвійні нерівності

- а) $-1 \leq x \leq 1$; б) $-3 \leq x \leq 2$?

Вправа №6. Розв'яжіть нерівності.

а) $3(x + 4) + 2(3x - 2) > 5x - 3(2x + 4)$;

б) $0,3 \leq 1,2 + 0,5(x - 2)$;

в) $0,2(x - 2) - 0,3(3 - x) \geq 0,4(2x - 1) - 0,5(x - 1)$;

г) $\frac{1}{2}(c - 3) - \frac{3}{2}(2 - c) \geq \frac{2c}{3}$; е) $\frac{1-x}{2} \leq 1 - \frac{2+x}{7}$;

д) $\frac{1-x}{4} \leq x - \frac{3+2x}{2}$; є) $\frac{x+2}{0,3} + \frac{2-x}{0,4} < \frac{x+4}{1,2}$.

Вправа №7. Яке найменше ціле число t задовольняє нерівності:

$$3t + 8(2t - 1) > 5t + 35.$$

Вправа №8. Як розв'язати нерівність $ax + b > 0$, якщо $a < 0$?

У відповідь запишіть правильну послідовність літер.

- а) перейти до нерівності $ax > b$;
- б) перейти до нерівності $ax > -b$;
- в) перейти до нерівності $ax < -b$;
- г) перейти до нерівності $x > -\frac{b}{a}$;
- д) перейти до нерівності $x < -\frac{b}{a}$;
- е) перейти до нерівності $x > \frac{b}{a}$;
- є) записати у відповідь проміжок $\left(-\infty; -\frac{b}{a}\right)$;
- ж) записати у відповідь проміжок $\left(\frac{b}{a}; +\infty\right)$;
- з) записати у відповідь проміжок $\left(-\frac{b}{a}; +\infty\right)$.

Заняття №7. Системи лінійних нерівностей з однією змінною

Словник уроку:

українська	англійська	французька	арабська	фарсі
система нерівностей, -і	inequation	inéquation	غير متساوي	نا برابرى
перетин (переріз)	crossing	traversée	العبور	عبور
відносно (чого?)	relatively	relativement	نسبياً	به طور نسبى
окремо	separately	séparément	بشكل منفصل	بطور جداگانه
кількість/кількості	number	nombre	رقم	عدد
спільний, -а, -е, -і	common	commun	مشترك	مشترك
довільний, -а, -е, -і	arbitrary	arbitraire	اعتباطياً	خودسرانه

Завдання №1. Слухайте і читайте текст №10.

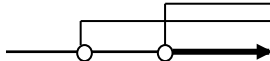
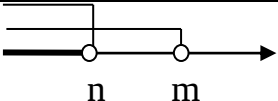
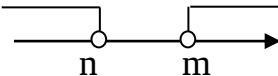
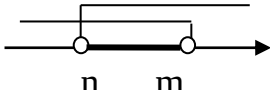
Текст №10

Система лінійних нерівностей з однією змінною – нерівності, відносно яких ставлять задачу: знайти спільні розв’язки.

Щоб розв'язати систему нерівностей з однією змінною, слід:

- окремо розв'язати кожну нерівність;
- знайти перетин (переріз) знайдених розв'язків.

Нехай m та n – довільні дійсні числа, такі, що $m > n$. Можливі чотири основні випадки розв’язків:

$\begin{cases} x > m, \\ x > n \end{cases}$		$x > m$	$x \in (m; +\infty)$
$\begin{cases} x < m, \\ x < n \end{cases}$		$x < n$	$x \in (-\infty; n)$
$\begin{cases} x > m, \\ x < n \end{cases}$		$\emptyset$	
$\begin{cases} x < m, \\ x > n \end{cases}$		$n < x < m$	$x \in]n; m[$

Приклад 1.

$$\begin{cases} x > 4, \\ x > 2 \end{cases} \quad \begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \rightarrow \\ 2 \quad \quad 4 \end{array} \quad x > 4 \quad x \in (4; +\infty).$$

Приклад 2.

$$\begin{cases} x < 4, \\ x \leq 2 \end{cases}$$

$x \leq 2 \quad x \in]-\infty; 2].$

Приклад 3.

$$\begin{cases} x \geq 4, \\ x < 2 \end{cases}$$

A number line with arrows at both ends. There are two points marked: 2 and 4. At point 2, there is an open circle (○) with a horizontal line segment extending to the left. At point 4, there is a closed circle (●) with a horizontal line segment extending to the right.

$\emptyset$.

Приклад 4.

$$\begin{cases} x \leq 4, \\ x > 2 \end{cases}$$
$$2 \leq x < 4$$
$$x \in [2; 4[.$$

Приклад 5.

$$\begin{cases} 3x - 4 < 8x + 6, \\ 5x + 11 \geq 4 - 2x; \end{cases} \begin{cases} 3x - 8x < 4 + 6, \\ 5x + 2x \geq 4 - 11; \end{cases} \begin{cases} -5x < 10, \\ 7x \geq -7; \end{cases} \begin{cases} x > -2, \\ x \geq -1; \end{cases}$$

Відповідь: $x \in [-1; +\infty[.$

Завдання №2. Виконайте вправи.

Вправа №1. Дайте відповіді на запитання:

1. Що називається системою лінійних нерівностей з однією змінною?
2. Як розв'язати систему лінійних нерівностей з однією змінною?

Вправа №2. Розв'яжіть нерівності.

$$\text{a) } \begin{cases} 7(x+1) - 2x > 9 - 4x, \\ 3(5-x) - 1 \geq 4 - 5x; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 3x \leq 5 - 6x, \\ 4x - 1 \geq 1 - 3x. \end{cases}$$

Вправа №3. Знайдіть цілі розв'язки систем:

$$\text{a) } \begin{cases} \frac{x}{6} + \frac{2}{3}(x-7) < \frac{3x-20}{9}, \\ 3x > 2 - \frac{2x-13}{11}; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{x-1}{2} - \frac{x-2}{3} \geq \frac{x-3}{4} - x, \\ 1 - 0,5x > x - 4. \end{cases}$$

Вправа №4. Знайдіть кількість цілих розв'язків системи нерівностей:

$$\begin{cases} 5(x-3)+11>3(x+3), \\ \frac{2x-1}{4}-\frac{x+3}{8}\leq 4. \end{cases}$$

Вправа №5. Знайдіть значення параметру a , при якому розв'язком системи нерівностей $\begin{cases} a \leq x \leq a + 20, \\ x \geq 15 \end{cases}$ є проміжок, довжина якого дорівнює 17.

Вправа №6. Знайдіть значення параметру m , при якому розв'язком системи нерівностей $\begin{cases} m - 30 \leq x \leq m, \\ x \leq 10 \end{cases}$ є проміжок, довжина якого дорівнює 25.

Заняття №8. Квадратні нерівності.

Дробово-раціональні нерівності. Метод інтервалів

Словник уроку:

українська	англійська	французька	арабська	фарсі
метод інтервалів				
раціональна нерівність	inequation ration	inéquation rationnel	عدم المساواة المنطقية	نامساویهای منطقی
дробово-раціональна нерівність	inequation linearfractional	Inéquation fractionnaire	عدم المساواة المنطقية في الكسور	نامساوی کسری منطقی
відмічати/відмітити (що? де?)	point out	pointer	يحدد	علامت گذاشتن
досліджувати/ дослідити (що?)	to investigate	rechercher	يستكشف	بررسی کردن
робити висновки	arriveat conclusion	Dégagerune conclusion	استخلاص النتائج	نتیجه گرفتن
згідно (чого?)	in accordance to	auxtermesde	موافقة ل	با توجه به
рівносильний, -a, -e, -i	equivalent	equivalente	نظير	معادل
многочлен, -и	polynomial	polinome	متعدد الحدود	چند جمله ای
застосовувати/ застосувати (що?)	to apply	employer	يستخدم	تبدیل کردن
перетворювати/ перетворити (що?)	to transform	transform	يحول	تغییر شکل یافتن
міркування	consideration	considération	الاعتبار	توجه
аналогічний, -a, -e, -i	similar	similaire	مماثل	مشابه
зростання	increase	augmenter	نمو	افزایش دادن
враховувати/ врахувати (що?)	take into account	prendre en compte	تأخذ بعين الاعتبار	به حساب آوردن

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ

1. Зобразити що(з.в.) де(м.в.) як

Зобразити числа $a_1, a_2, \dots, a_n$; $b_1, b_2, \dots, b_n$ на числовій прямій у порядку зростання.

2. Що(н.в.) проводиться за яких умов

Аналогічні міркування проводяться при розв'язуванні нерівностей.

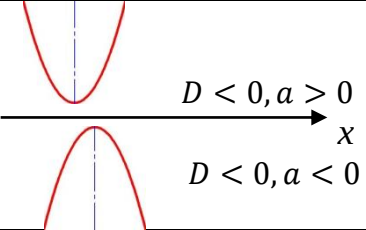
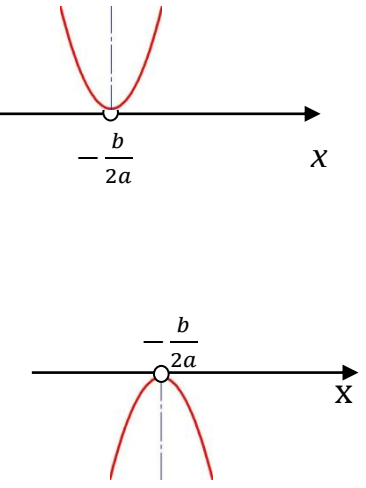
3. В залежності від чого(р.в.) можливе що(н.в.)

В залежності від знаку дискримінанту квадратного тричлена можливі такі випадки розв'язування.

Завдання №1. Слухайте і читайте текст №11.

Текст №11

Нехай потрібно розв'язати квадратну нерівність $ax^2 + bx + c > 0$ (аналогічні міркування проводяться при розв'язуванні нерівностей $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$, $ax^2 + bx + c \leq 0$). В залежності від знаку дискримінанту квадратного тричлена $D = b^2 - 4ac$ можливі такі випадки:

1) $D < 0$ А) якщо $a > 0$, то $ax^2 + bx + c > 0$ для усіх x. Б) якщо $a < 0$, то $ax^2 + bx + c < 0$ для усіх x.	
2) $D = 0$ А) Якщо $a > 0$, то нерівність $ax^2 + bx + c > 0$ має розв'язком будь-яке значення x, окрім $x = -\frac{b}{2a}$. Б) якщо $a > 0$, то нерівність $ax^2 + bx + c < 0$ не має розв'язків. В) якщо $a < 0$, то нерівність $ax^2 + bx + c > 0$ не має розв'язків. Г) якщо $a < 0$, то нерівність $ax^2 + bx + c < 0$, має розв'язком будь-яке значення x, окрім $x = -\frac{b}{2a}$.	
3) $D > 0$ Знайти корені x_1 та x_2 квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$, розв'язавши квадратне рівняння $ax^2 + bx + c = 0$. А) Якщо $a > 0$, то нерівність $ax^2 + bx + c > 0$ має розв'язком проміжки $]-\infty; x_1[$ та $]x_2; +\infty[$ (за умови, що $x_1 < x_2$). Б) якщо $a > 0$, то нерівність $ax^2 + bx + c < 0$ має розв'язком проміжок $]x_1; x_2[$ (за умови, що $x_1 < x_2$). В) Якщо $a < 0$, то нерівність $ax^2 + bx + c > 0$ має розв'язком проміжок $]x_1; x_2[$ (за умови, що $x_1 < x_2$). Г) якщо $a < 0$, то нерівність $ax^2 + bx + c < 0$ має розв'язком проміжки $]-\infty; x_1[$ та $]x_2; +\infty[$ (за умови, що $x_1 < x_2$).	

Приклад 1. Розв'язати нерівність. $x^2 - 5x + 7 > 0$.

Знайдемо корені квадратного тричлена, розв'язавши квадратне рівняння $x^2 - 5x + 7 = 0$.

$D = 25 - 28 = -3 < 0 \Rightarrow$ рівняння не має розв'язків.

Перший коефіцієнт (біля x^2) додатний ($1 > 0$), отже квадратний тричлен $x^2 - 5x + 7$ додатний для будь-якого значення x (1А).

Відповідь: $x \in]-\infty; +\infty[$.

Приклад 2. Розв'язати нерівність $3x^2 - 4x + 5 < 0$.

Знайдемо корені квадратного тричлена, розв'язавши квадратне рівняння $3x^2 - 4x + 5 = 0$.

$D = 16 - 4 \cdot 3 \cdot 5 < 0 \Rightarrow$ рівняння не має розв'язків.

Перший коефіцієнт (біля x^2) додатний ($3 > 0$), отже квадратний тричлен $3x^2 - 4x + 5$ додатний для будь-якого значення x (1Б).

Відповідь: $\emptyset$.

Приклад 3. Розв'язати нерівність $-2x^2 + x + 1 \geq 0$.

Знайдемо корені квадратного тричлена, розв'язавши квадратне рівняння $-2x^2 + x + 1 = 0$.

$D = 1 - 4 \cdot (-2) \cdot 1 = 9 > 0$, рівняння має два дійсних різних корені.

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{9}}{-4} = \frac{-1+3}{-4} = -\frac{1}{2}; \quad x_2 = \frac{-1-\sqrt{9}}{-4} = \frac{-1-3}{-4} = 1$$

Перший коефіцієнт (біля x^2) від'ємний ($-2 < 0$), отже квадратний тричлен не є від'ємним (≥ 0), якщо $x \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right]$ (3В).

Відповідь: $x \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

Дробово-раціональні нерівності.

Нехай $A(x)$ та $B(x)$ многочлени.

Нерівність $\frac{A(x)}{B(x)} > 0$ рівносильна нерівності $A(x) \cdot B(x) > 0$.

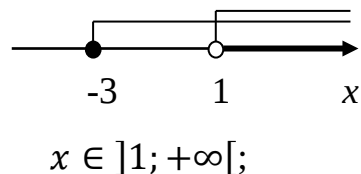
Нерівність $\frac{A(x)}{B(x)} < 0$ рівносильна нерівності $A(x) \cdot B(x) < 0$.

Нерівність $\frac{A(x)}{B(x)} \geq 0$ $\left(\frac{A(x)}{B(x)} \leq 0\right)$ рівносильна двом системам нерівностей:

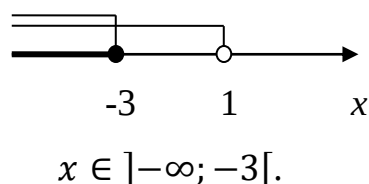
$$\left\{ \begin{array}{l} A(x) \geq 0, \\ B(x) > 0 \end{array} \right. \text{ і } \left\{ \begin{array}{l} A(x) \leq 0, \\ B(x) < 0 \end{array} \right. \quad \left(\left\{ \begin{array}{l} A(x) \geq 0, \\ B(x) < 0 \end{array} \right. \text{ і } \left\{ \begin{array}{l} A(x) \leq 0, \\ B(x) > 0 \end{array} \right. \right).$$

Приклад 4. Розв'язати нерівність $\frac{2x+6}{x-1} \geq 0$.

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x + 6 \geq 0 \\ x - 1 > 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} 2x \geq -6 \\ x > 1 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x \geq -3 \\ x > 1 \end{array} \right.$$



$$\left\{ \begin{array}{l} 2x + 6 \leq 0 \\ x - 1 < 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} 2x \leq -6 \\ x < 1 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x \leq -3 \\ x < 1 \end{array} \right.$$



Відповідь: $x \in]-\infty; -3[\cup]1; +\infty[.$

Метод інтервалів.

Нехай $A(x)$ та $B(x)$ многочлени.

Для розв'язування нерівностей $\frac{A(x)}{B(x)} > 0$ (< 0) або $\frac{A(x)}{B(x)} \geq 0$ (≤ 0)

використовують метод інтервалів. Розглянемо нерівність $\frac{A(x)}{B(x)} > 0$. Вона рівносильна нерівності $A(x) \cdot B(x) > 0$.

А) знайдемо корені многочленів $A(x)$ та $B(x)$ ($a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, b_2, \dots, b_n$) відповідно;

Б) запишемо многочлени у вигляді добутків: $\frac{(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)}{(x-b_1)(x-b_2)\dots(x-b_n)} > 0$.

Цей дріб рівносильний виразу:

$$(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n) \cdot (x - b_1)(x - b_2) \dots (x - b_n) > 0;$$

В) зобразимо корені многочленів, тобто числа $a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, b_2, \dots, b_n$ на числовій прямій у порядку зростання (ці числа розіб'ють числову пряму на проміжки);

Г) визначимо знаки кожного з виразів на кожному проміжку;

Д) визначимо послідовність знаків дробу (добутку) та отримаємо усі розв'язки, які відповідають умові.

Приклад 5. Розв'язати нерівність $(x + 1)(2 - x)(x - 3)x > 0$.

Використаємо метод інтервалів:

$$x + 1 = 0 \quad 2 - x = 0 \quad x - 3 = 0 \quad x = 0$$

$$x = -1 \quad x = 2 \quad x = 3$$

Зобразимо числа $-1, 0, 2$ та 3 на числовій вісі та визначимо знаки кожного з виразів $(x + 1), (2 - x), (x - 3)$ та x на кожному з інтервалів:

	$-\infty$	-1	0	2	3	$+\infty$
$x + 1$	" - "	" + "	" + "	" + "	" + "	" + "
$2 - x$	" + "	" - "	" + "	" - "	" - "	" - "
$x - 3$	" - "	" - "	" - "	" - "	" + "	" + "
x	" - "	" - "	" + "	" + "	" + "	" + "
$(x + 1)(2 - x)(x - 3)x$	" - "	" + "	" - "	" + "	" - "	" - "

Відповідь: $x \in]-1; 0[\cup]2; 3[$.

Приклад 6. Розв'язати нерівність $\frac{x^2 + 4x - 5}{x + 3} < 0$.

Знайдемо корені квадратного тричлена, розв'язавши рівняння $x^2 + 4x - 5 = 0$.

$$D = 16 - 4 \cdot 1 \cdot (-5) = 36 > 0 \Rightarrow \text{рівняння має два різні корені:}$$

$$x_1 = \frac{-4 + \sqrt{36}}{2} = \frac{-4 + 6}{2} = 1; \quad x_2 = \frac{-4 - \sqrt{36}}{2} = \frac{-4 - 6}{2} = -5.$$

Запишемо квадратний тричлен $x^2 + 4x - 5$ у вигляді добутку (розкладемо квадратний тричлен на множники): $x^2 + 4x - 5 = (x + 5)(x - 1)$.

Нерівність $\frac{x^2 + 4x - 5}{x + 3} < 0$ запишемо у вигляді: $(x + 5)(x - 1)(x + 3) < 0$.

$$x + 5 = 0, \quad x - 1 = 0, \quad x + 3 = 0,$$

$$x = -5 \quad x = 1 \quad x = -3.$$

Зобразимо числа $-5, -3$ та 1 на числовій вісі та визначимо знаки кожного з виразів $(x + 5), (x - 1)$ та $(x + 3)$ на кожному з інтервалів:

	$-\infty$	-5	-3	1	$+\infty$
$x + 5$	" - "	" + "	" + "	" + "	" + "
$x - 1$	" - "	" - "	" - "	" + "	" + "
$x + 3$	" - "	" - "	" + "	" + "	" + "
$(x + 5)(x - 1)(x + 3)$	" - "	" + "	" - "	" + "	" + "

Оберемо розв'язки, які відповідають умові $(x + 5)(x - 1)(x + 3) < 0$, тобто проміжки із знаком “-”.

Відповідь: $x \in]-\infty; -5[\cup]-3; 1[$.

Приклад 7. Розв'язати нерівність $(x - 1)^2(x - 2)^3(x + 4) < 0$.

Знайдемо «нулі» лівої частини нерівності:

$$x - 1 = 0, \quad x - 2 = 0, \quad x + 4 = 0,$$

$$x = 1 \quad \quad x = 2 \quad \quad x = -4.$$

Зобразимо числа -4 , 1 та 2 на числовій вісі та визначимо знаки кожного з виразів $(x - 1)^2$, $(x - 2)^3$ та $(x + 4)$ на кожному з інтервалів, враховуючи, що $(x - 1)^2 > 0$ при $x \neq 1$:

	$-\infty$	-4	1	2	$+\infty$
$(x - 1)^2$	“+”	“+”	“+”	“+”	“+”
$(x - 2)^3$	“-”	“-”	“-”	“+”	“+”
$(x + 4)$	“-”	“+”	“+”	“+”	“+”
$(x - 1)^2(x - 2)^3(x + 4)$	“+”	“-”	“-”	“+”	“+”

Відповідь: $x \in]-4; 1[\cup]1; 2[$

Приклад 8. Розв'язати нерівність $\frac{x-2}{2x+6} \leq 1$.

Виконаємо перетворення, щоб застосувати метод інтервалів:

$$\frac{x-2}{2x+6} - 1 = \frac{x-2-2x-6}{2x+6} = \frac{-x-8}{2x+6}; \quad \frac{-x-8}{2x+6} \leq 0 \Rightarrow (-x-8)(2x+6) \leq 0.$$

$$-x - 8 = 0, \quad 2x + 6 = 0,$$

$$x = -8 \quad \quad x = -3.$$

	$-\infty$	-8	-3	$+\infty$
$-x - 8$	“+”	“-”	“-”	“-”
$2x + 6$	“-”	“-”	“+”	“+”
$(-x - 8)(2x + 6)$	“-”	“+”	“-”	“-”

Відповідь: $x \in]-\infty; -8] \cup]-3; +\infty[$.

Завдання №2. Виконайте вправи.

Вправа №1. Розв'яжіть нерівності.

а) $2x^2 + x + 10 < 0$;

б) $(x - 5)(2x + 1) - 2x(x - 7) < 1 - x$;

в) $x^2 + 4x + 4 > 0$;

д) $(4x - 1)(x - 3) - 5x(x - 2) + 6 > 5 - 2x^2$;

г) $2x^2 - 5x + 2 < 0$; е) $(4x - 1)(x - 3) - 5x(x - 2) > 6x + 2x^2$.

Вправа №2. Знайдіть кількість цілих розв'язків нерівностей:

а) $x^2 - 3x - 5 < 0$; б) $x^2 - 5x + 5 \leq 0$.

Вправа №3. Розв'яжіть нерівності.

а) $\frac{3}{x-2} < 1$; г) $\frac{4-3x}{3x^2-x-4} \leq 4$;
 б) $\frac{2x-7}{9-3x} > 0$; д) $\frac{8-3x}{3x^2-2x-16} \leq 1$;
 в) $\frac{x}{5-x} > \frac{1}{2}$; е) $\frac{x-1}{x} - \frac{x+1}{x-1} < 2$.

Вправа №4. Розв'яжіть нерівності методом інтервалів.

а) $x(x+2)(x-3)(4-x) > 0$; д) $(x-1)(x-2)(x-3)^2 > 0$;
 б) $(x+5)(x-1)(2x+2) < 0$; е) $x(x-1)(2-x)(x-4)^2 > 0$;
 в) $(x^2+3x-28)(-x^2+2x+1) \leq 0$; є) $\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2} \leq 1$.
 г) $\frac{3x^2+5x-8}{x^2-x-2} > 0$;

Заняття №9. Розв'язування прикладів. Повторення

Завдання 1. Читайте. Перекладіть слова та сполучення рідною мовою:

Рівняння, тотожність, корінь рівняння, рівносильні рівняння, розв'язати рівняння, розв'язок, допустимі значення, область допустимих значень.

Змінна, невідоме, лінійне рівняння, рівняння першого степеня, рівняння з однією змінною, рівняння не має розв'язків.

Модуль, проміжок, інтервал, метод інтервалів. Система рівнянь з двома невідомими; система рівнянь з двома змінними; пропорційні коефіцієнти; підстановка, спосіб підстановки; додавання, спосіб додавання; метод Крамера.

Квадратне рівняння; квадратний тричлен; дискримінант. Біквадратне рівняння; заміна змінної. Ірраціональне рівняння; піднесення до квадрату; зайвий корінь; перевірка.

Нерівність, числова нерівність; буквена нерівність; система нерівностей; множина розв'язків; визначити послідовність знаків; замкнутий проміжок; відкритий проміжок; напіввідкритий проміжок; нескінчений проміжок; переріз/перетин.

Завдання №2. Закінчіть фрази:

- А) Рівнянням називається рівність, яка
- Б) Тотожність – це рівність, яка
- В) Два рівняння називаються, якщо вони мають одні й ті самі корені;
- Г) Значення невідомої величини, при якому рівняння перетворюється на правильну числову рівність, називається ;
- Д) $ax + b = 0$ – це загальний вигляд рівняння;
- Е) Загальний вигляд повного квадратного рівняння:..... .

Заняття №10. КОНТРОЛЬНА РОБОТА №3

Виконайте завдання. Перевірте себе

Варіант 1

Умова завдання	Відповіді
1. Напишіть, які з рівностей є тотожностями, а які – рівняннями: а) $4x - 3x = 1$; б) $-3y + 3 = 3(1 - y)$; в) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; г) $9(x-2)=7x+2(x-1)+19$; д) $x^2 + 3x = x(x + 3)$.	а), г) – рівняння; б), в), д) – тотожності.
2. Напишіть загальний вигляд квадратного рівняння та формули коренів рівняння за умови $D=0$.	$ax^2 + bx + c = 0$; $x_{1,2} = -\frac{b}{2a}$
3. Розв'яжіть рівняння $\frac{7+9x}{4} - 1 + \frac{2-x}{9} = 7x$.	0,2
4. Розв'яжіть систему рівнянь. Вкажіть, який спосіб ви застосували: $\begin{cases} 3x - 4y = 2; \\ 5x - 7y - 3 = 0. \end{cases}$	(2;1) Спосіб/метод
5. Розв'яжіть рівняння: $\frac{3x-7}{x+5} = \frac{x-3}{x+2}$.	$\frac{1}{2}$; 1.
6. Розв'яжіть рівняння. Вкажіть його назву: $4x^4 + x^2 - 3 = 0$.	$\pm \frac{\sqrt{3}}{2}$. Бікватратне рівняння
7. Розв'яжіть рівняння. Вкажіть його назву: $\sqrt{7x-6} - \sqrt{4x+12} = 0$.	6. Ірраціональне рівняння
8. Розв'яжіть рівняння $x + 5 + 2 - x = 7$.	$[-5; 2]$
9. Розв'яжіть систему нерівностей: $\begin{cases} 0,2(3 - x) \geq 4(x + 1,5) + 0,9; \\ 1,4x + 7 \geq 0,2 - 2x. \end{cases}$	$x \in [-2; -1, 5]$
10. Розв'яжіть нерівність $(x - 4)(5 - x)(x - 1)^2 > 0$.	$x \in]4; 5[$

Виконайте завдання. Перевірте себе

Варіант 2

Умова завдання	Відповіді
1. Напишіть, які з рівностей є тотожностями, а які – рівняннями: а) $4 - 3x = x$; б) $-3 + 3z = 3(z - 1)$; в) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab - b^2$; г) $4(x-1)=7x+2(x-2)-5x$; д) $x^2 + 8x = x(8 + x) + 1$.	а), в), д) – рівняння; б), г) – тотожності.
2. Напишіть загальний вигляд квадратного рівняння та формули коренів рівняння за умови $D > 0$.	$ax^2 + bx + c = 0$; $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
3. Розв'яжіть рівняння: $x - \frac{1}{4} \left(\frac{x+1}{2} - \frac{2x+5}{3} \right) = \frac{2x-1}{4}$	–1
4. Розв'яжіть систему рівнянь. Вкажіть, який спосіб ви застосували: $\begin{cases} 2x - 3y = 8; \\ 7x - 5y = -5. \end{cases}$	(-5;-6) Спосіб/метод _____
5. Розв'яжіть рівняння: $\frac{y}{y+1} + \frac{y+1}{y+2} = \frac{7}{6}$	–1, 6; 1
6. Розв'яжіть рівняння. Вкажіть його назву: $2x^4 - 11x^2 + 12 = 0$.	$\pm\sqrt{1,5}; \pm 2$ Бікватратне рівняння
7. Розв'яжіть рівняння. Вкажіть його назву: $\sqrt{x+6} + \sqrt{x-1} = 7$.	Ірраціональне рівняння
8. Розв'яжіть рівняння $x - 5 + 3 - x = 8$.	0; 8
9. Розв'яжіть систему нерівностей: $\begin{cases} 7x - 10 \leq 3(x - 1) + 21; \\ \frac{3x-5}{5} > \frac{x-1}{2} - 1 \end{cases}$	$x \in]-5; 7]$
10. Розв'яжіть нерівність $(x - 1)(x - 2)(3 + x)^2 > 0$.	$x \in]1; 2[$